УДК 681.3.06

ЭФФЕКТИВНОСТЬ БЛОКОВЫХ ДВОИЧНЫХ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ

А.Н. Мальчуков, А.Н. Осокин

Томский политехнический университет
E-mail: osokin@ce.cctpu.edu.ru, jgs@tpu.ru

Рассмотрен вопрос эффективности блоковых двоичных помехоустойчивых кодов для исправления независимых ошибок или их пакетов. Приведены графики эффективности корректирующих блоковых двоичных помехоустойчивых кодов.

При проектировании помехоустойчивых кодов всегда возникает вопрос об эффективности их использования. Известны две основные модели ошибок: независимые ошибки определённой кратности и пакеты ошибок [1]. В связи с этим существует разделение (специализация) блоковых двоичных помехоустойчивых кодов (ниже по тексту просто кодов) по исправлению либо независимых ошибок, либо их пакетов (блоков, пачек).

В литературе имеются результаты исследований эффективности лишь некоторых кодов [2], а исследований зависимости эффективности от разрядности кодового слова и корректирующей способности для произвольного кода нам неизвестны. Под эффективностью кода Q в данной работе подразумевается произведение двух соотношений:

$$Q = \frac{n-k}{n} \cdot \frac{t}{n}, \qquad (*)$$

где n – длина кодового слова, k – длина контрольного блока (в данной работе исследуются систематические коды), t – количество ошибок, исправляемых кодом, или корректирующая способность (в некоторых случаях длина пакета ошибок).

В оценку эффективности кода, на наш взгляд, вошли его самые важные характеристики, выраженные в двух отношениях (*):

- $\frac{n-k}{n}$ – показывает долю информационных разрядов в кодовом слове;
- $\frac{t}{n}$ – выражает затраты кода для конкретной корректирующей способности кода.

Для вычисления численного значения верхней границы эффективности кода в (*) вместо длины контрольного блока k подставляется численное значение нижней границы длины контрольного блока для соответствующего типа исправляемых ошибок.

В соответствии со специализацией кода можно разделить оценку его эффективности, вычисляемую по формуле (*) для независимых ошибок и пакетов ошибок.

Независимые ошибки

Модель поведения независимых ошибок в основном используется для исправления ошибок, возникающих при передаче данных по спутниковым или радиоканалам связи [3]. В таких приложениях в основном используют коды, исправляющие независимые ошибки кратности $t<5$. В данной работе мы будем рассматривать независимые ошибки кратности $t \le 10$, т. к. это позволит отследить тенденцию поведения численных значений верхних границ эффективностей кодов и выбрать эффективный код в более широком диапазоне его корректирующей способности.

Чтобы определить верхнюю границу эффективности кода, исправляющего независимые ошибки, необходимо знать численное значение нижней границы длины контрольного блока k, которое вычисляется с помощью нижней границы Хемминга [4]:

$$k = \left\lceil \log_2 \left(\sum_{i=0}^{t} C_n^i \right) \right\rceil,$$

где $[a]$ – большее целое от a, C_n^i – число сочетаний i из n.

Необходимо заметить, что нижняя граница длины контрольного блока не гарантирует существование кода с заявленной корректирующей способностью при заданной длине кодового слова, т. к. она формулирует минимальные требования к длине кодового блока для заявленной корректирующей способности кода, исправляющего независимые ошибки. На рис. 1 приведены графики численных значений нижних границ длин контрольных блоков для кодов с различной корректирующей способностью ($t=\overline{1,10}$) и длиной кодового слова ($n=\overline{2,64}$). Максимальная длина кодового слова выбрана равной $n=64$, чтобы не уменьшать детализацию полезной информации на графиках.

Подставив численные значения нижних границ контрольных блоков в (*), получим численные значения верхних границ эффективностей кодов с теми же параметрами, рис. 2.

Для наглядности отображения графиков значения отношений в (*) были переведены в процентные. Из выше приведённых графиков видно, что с ростом n и t верхняя граница эффективности кодов падает. Из этого следует, что использовать коды для исправления независимых ошибок при большой длине кодового слова невыгодно, т. к. требуется большее количество контрольных разрядов для исправления одного и того же количества ошибок. Исходя из рис. 2, самым эффективным кодом для исправления независимых ошибок является код (3,1), где $n=3$, $n-k=1$.

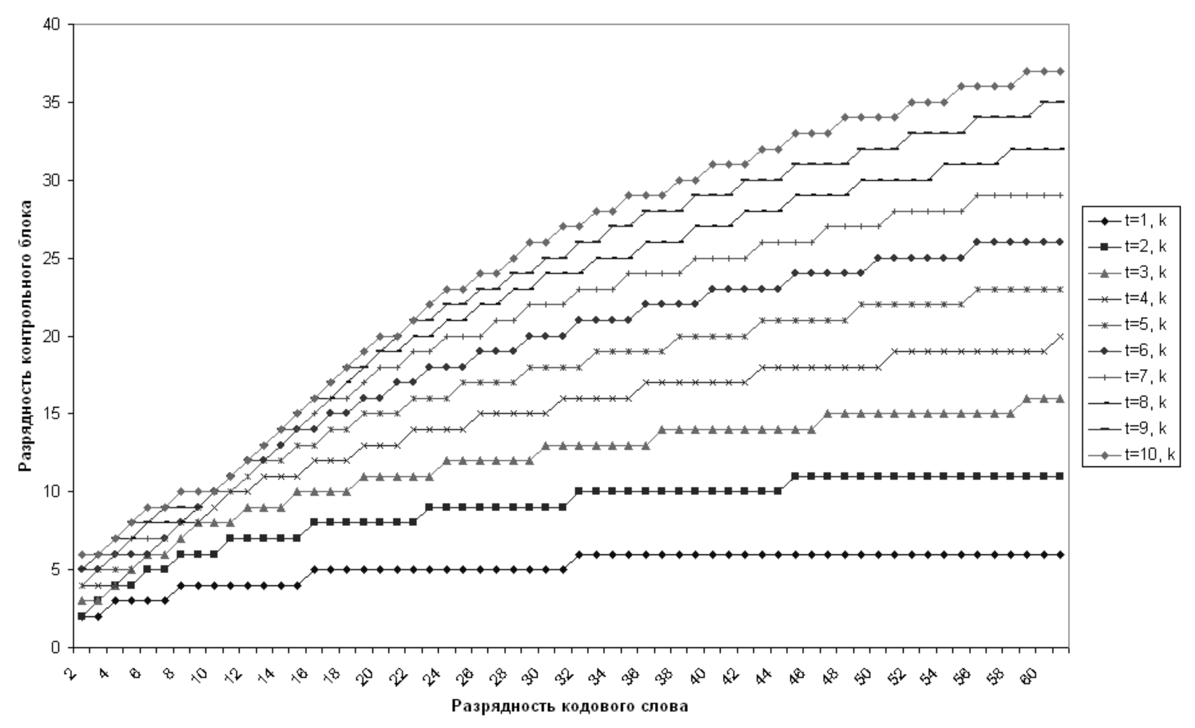


Рис. 1. *Разрядность контрольных блоков кодов для* $t=\overline{1,10}$ *и* $n=\overline{2,64}$

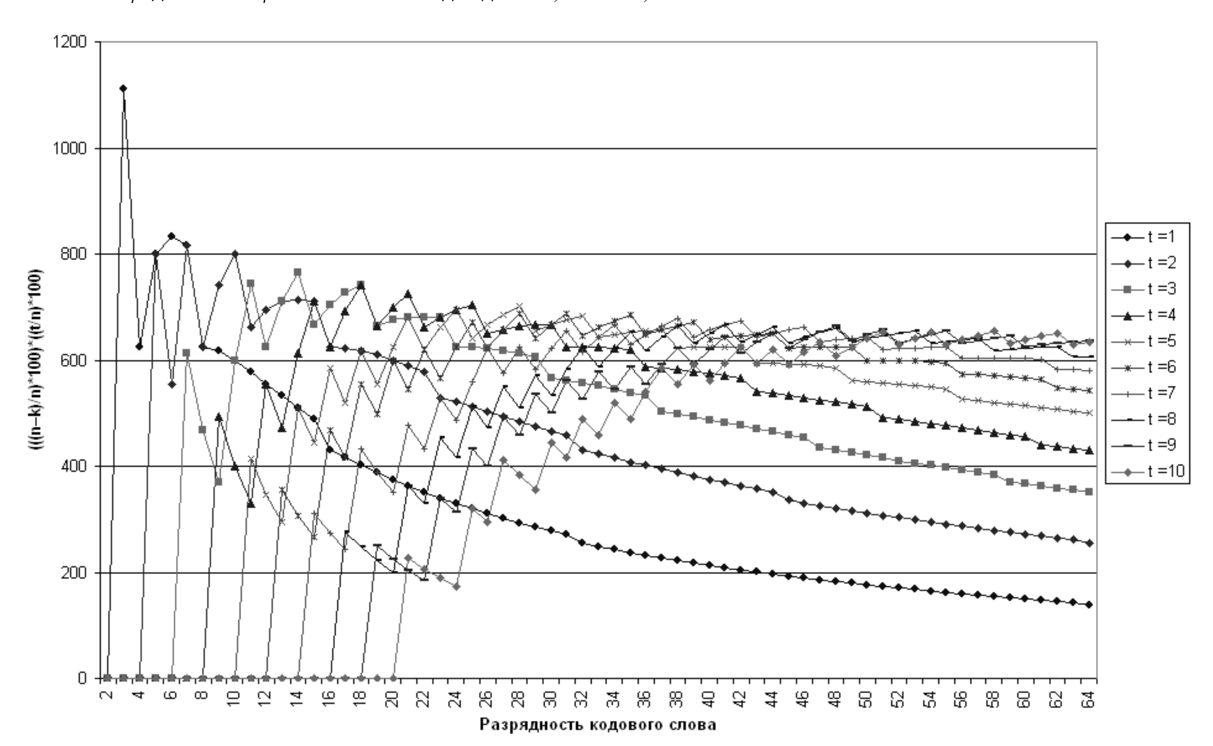


Рис. 2. *Численные значения верхних границ эффективностей кодов, исправляющих независимые ошибки, для* $t=\overline{1,10}$ *и* $n=\overline{2,64}$

Для иллюстрации этого утверждения рассчитаем численные значения нижней границы длины контрольного блока при корректирующей способности кода, равной t=8, и длины информационного блока, равной $n-k$=8, рис. 3.

Из рис. 3 следует, что минимальная разрядность кодового слова n=32, т. е. минимальная длина контрольного блока для исправления восьми независимых ошибок в едином кодовом слове равна 24 с учётом того, что длина информационного блока $n-k$=8.

Если использовать код (3,1) для $n-k$=8 и t=8, то потребуется кодовое слово, минимальная длина которого равна n=24.

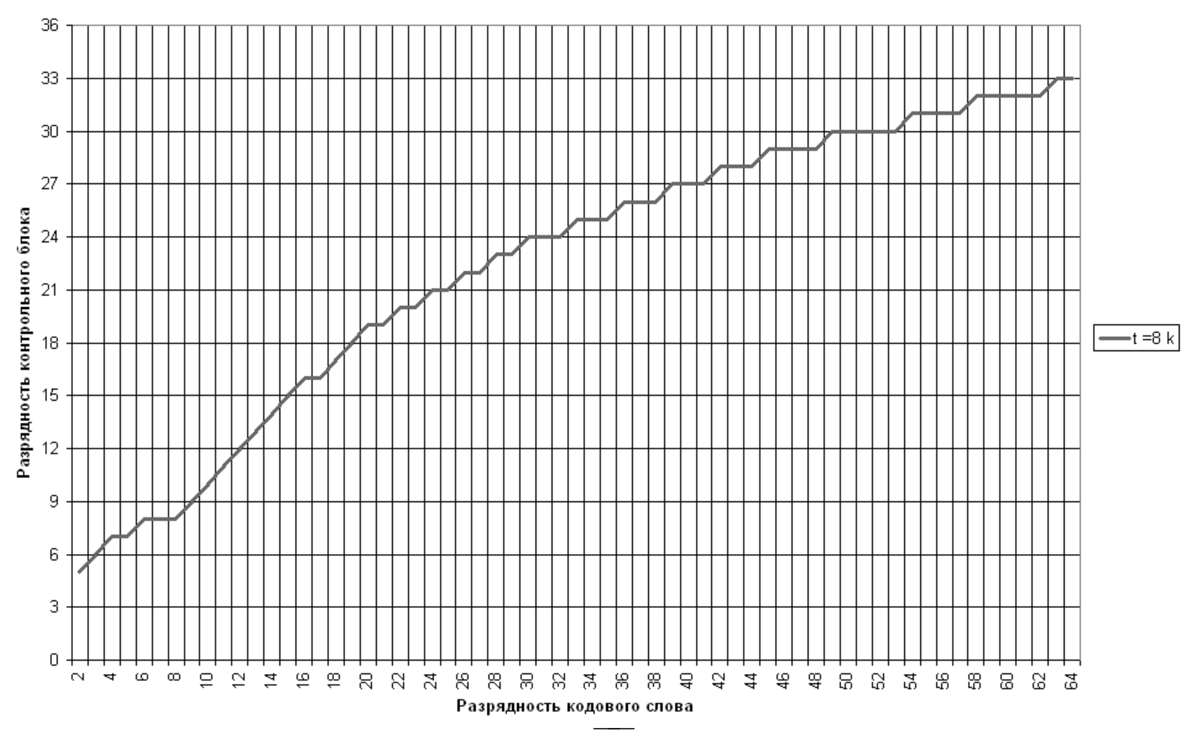


Рис. 3. *Разрядность контрольных блоков кодов для* $t=8$ *и* $n=\overline{2,64}$

Пакет ошибок

Пакет (блок, пачка) ошибок характеризуется тем, что ошибки возникают в ограниченной области, т. е. область возникновения ошибок ограничена определённым значением и она может быть в любой части кодового слова. Таким образом, ошибки образуют пакет ошибок. Пакет ошибок не обязательно содержит в себе инверсию разрядов кодового слова, это больше похоже на обнуление всех значений в определённой области или наоборот – установку всех разрядов области в единицу. Разряды, не совпавшие по значению с пакетом ошибки, считаются искажением разрядов кодового слова и подлежат исправлению.

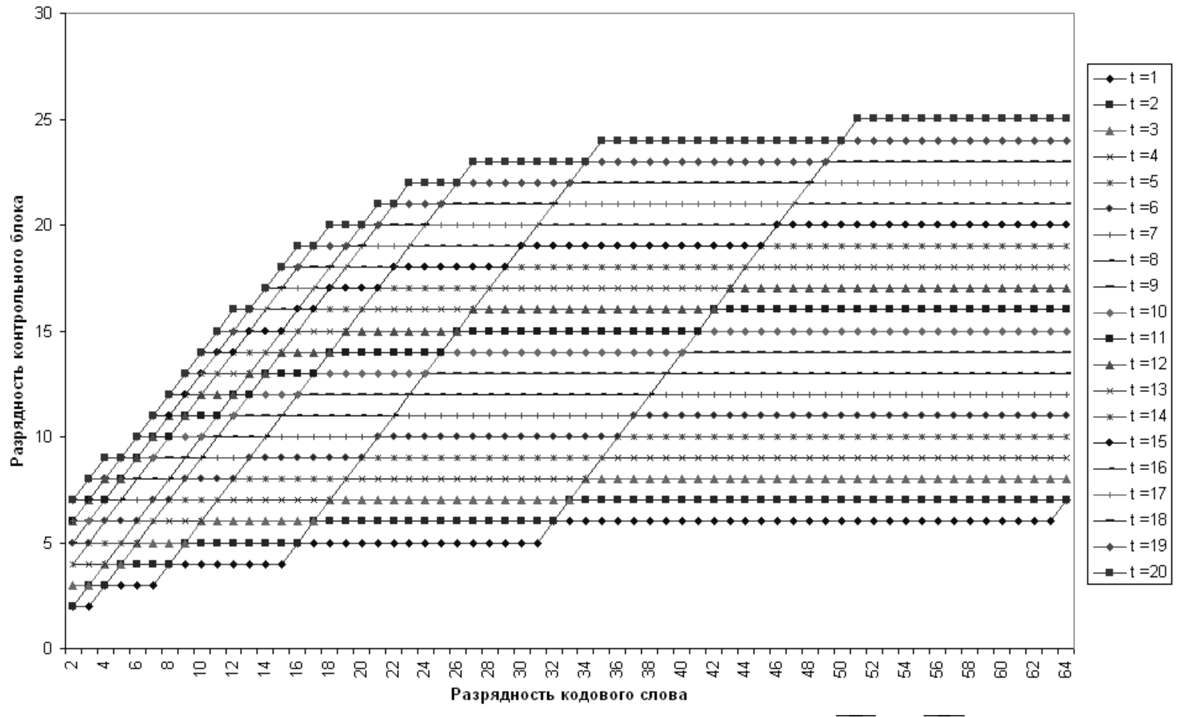


Рис. 4. *Разрядность контрольных блоков кодов, исправляющих пакеты ошибок, для* $t=\overline{1,20}$ *и* $n=\overline{2,64}$

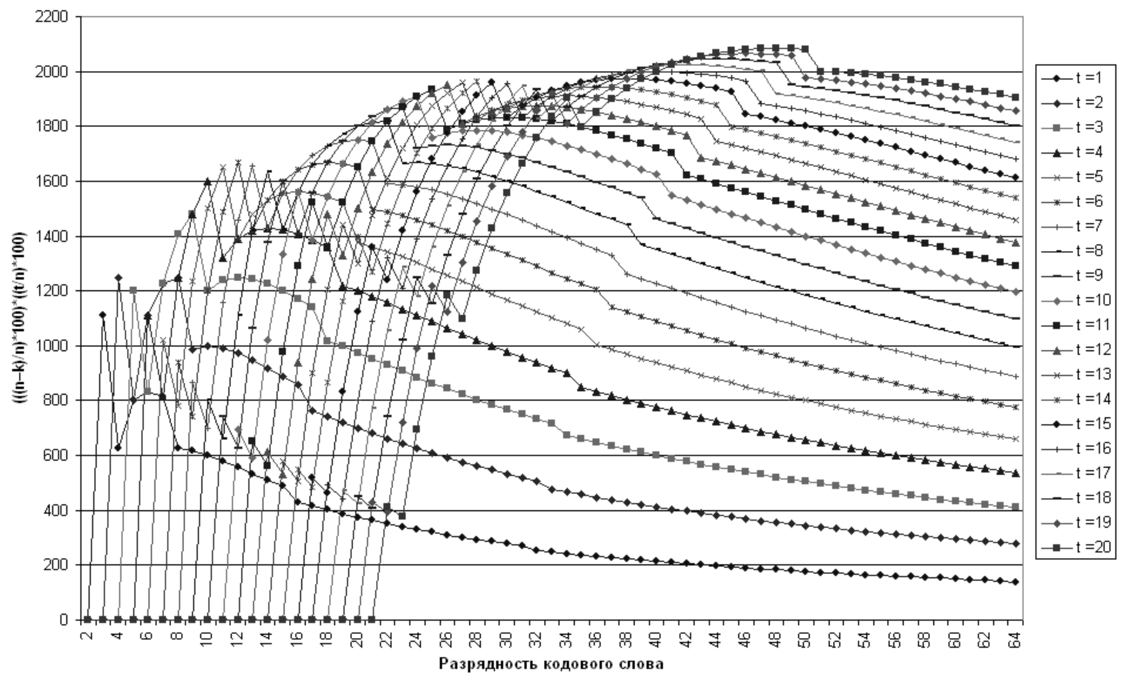


Рис. 5. *Численные значения верхних границ эффективностей кодов, исправляющих пакеты ошибок, для* $t=\overline{1,20}$ *и* $n=\overline{2,64}$

Для вычисления оценки нижней границы длины контрольного блока необходимо посчитать всевозможные комбинации ошибок, добавив одну комбинацию безошибочного приёма:

$$k = [\log_2((\sum_{i=1}^{t} C_{n-i+1}^{1}[2^{i-2}]) + 1)],$$

где t – длина пакета ошибок, $[2^{i-2}]$ – всевозможные комбинации пакета ошибок длины i; C_{n-i+1}^{1} – перестановки внутри кодового слова пакета ошибок длины i.

На рис. 4 приведены графики оценок нижних границ длин контрольных блоков для кодов с различной длиной пакета ошибок ($t=\overline{1,20}$) и длиной кодового слова ($n=\overline{2,64}$).

Подставив численные значения нижних границ контрольных блоков в (*), вычисляем численные значения верхних границ эффективностей кодов, рис. 5.

Из представленных графиков видно, что при росте разрядности кодового слова и длины исправляемого пакета ошибок растёт эффективность кода.

Необходимо заметить, что код (3,1), исправляющий одну независимую ошибку, можно использовать для исправления пачки ошибок, соединяя специальным образом разряды разных блоков кода для длины пакета ошибок t:

$$AB_1B_2 = \{a_1 \dots a_t\}\{b_{11} \dots b_{1t}\}\{b_{21} \dots b_{2t}\},$$

где a – информационные разряды блоков, b_1 и b_2 – разряды контрольных блоков.

Таким образом достигается исправление пачки ошибок t в кодовом слове длиной $n=3t$, но эффективность кода при таком методе его использования получается ниже, чем у кодов, составленных единым блоком, что и подтверждается на рис. 5.

Заключение

Анализ представленных численных значений верхних границ эффективностей кодов показывает, что эффективность применения блоковых двоичных помехоустойчивых кодов, исправляющих пакеты ошибок, неоспоримо выше эффективности кодов, исправляющих независимые ошибки.

Также необходимо отметить возможность использования кода, исправляющего независимые ошибки, для исправления пакетов ошибок, как это было продемонстрировано на примере кода (3,1). Эта возможность даёт шанс на построение кода, независимого от характера ошибок в канале, что очень важно для практического использования.

Приведённые формулу (*) и графики численных значений верхних границ эффективностей кодов, рассмотренных выше, рекомендуем использовать при поиске идеальных кодов, таких как код Голея (23,12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. – М.: Техносфера, 2005. – 320 с.
2. Мешковский К.А., Шехтман Л.И. Анализ помехоустойчивости кодов NMI и HDB-3 // Электросвязь. – 1995. – № 10. – С. 21–24.
3. Осмоловский С. А. Помехоустойчивое кодирование: кризис и пути выхода из него // Вестник РУДН. Сер. Прикладная и компьютерная математика. – 2004. – Т. 3. – № 1. – С. 179–187.
4. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976. – 524 с.